Econometría II

VAR

Carlos A. Yanes Guerra

2023-II

Preguntas de las sesiones anteriores?


Duff
4GIFS.com

Modelos VAR

Justificación

ℹ Las regresiones en series de tiempo como se vio en econometría I, pueden estar marcadas por la doble simultaneidad o retroalimentación entre las variables usadas, generando sesgos en los coeficientes.

ℹ Los modelos de vectores auto-regresivos (VAR) fueron desarrollados a partir de la critica de Sims a los modelos macroeconómicos que no identificaban la existencia de relaciones exógenas y endógenas entre las variables.

Para que sirve un VAR

- Como el pasado afecta el presente de las variables y si una variable puede ser útil para pronosticar otra (causalidad de Granger)
- Analizar las relaciones dinámicas basadas en efectos contemporáneos e impulsos respuesta
- Pronósticos

Modelos VAR

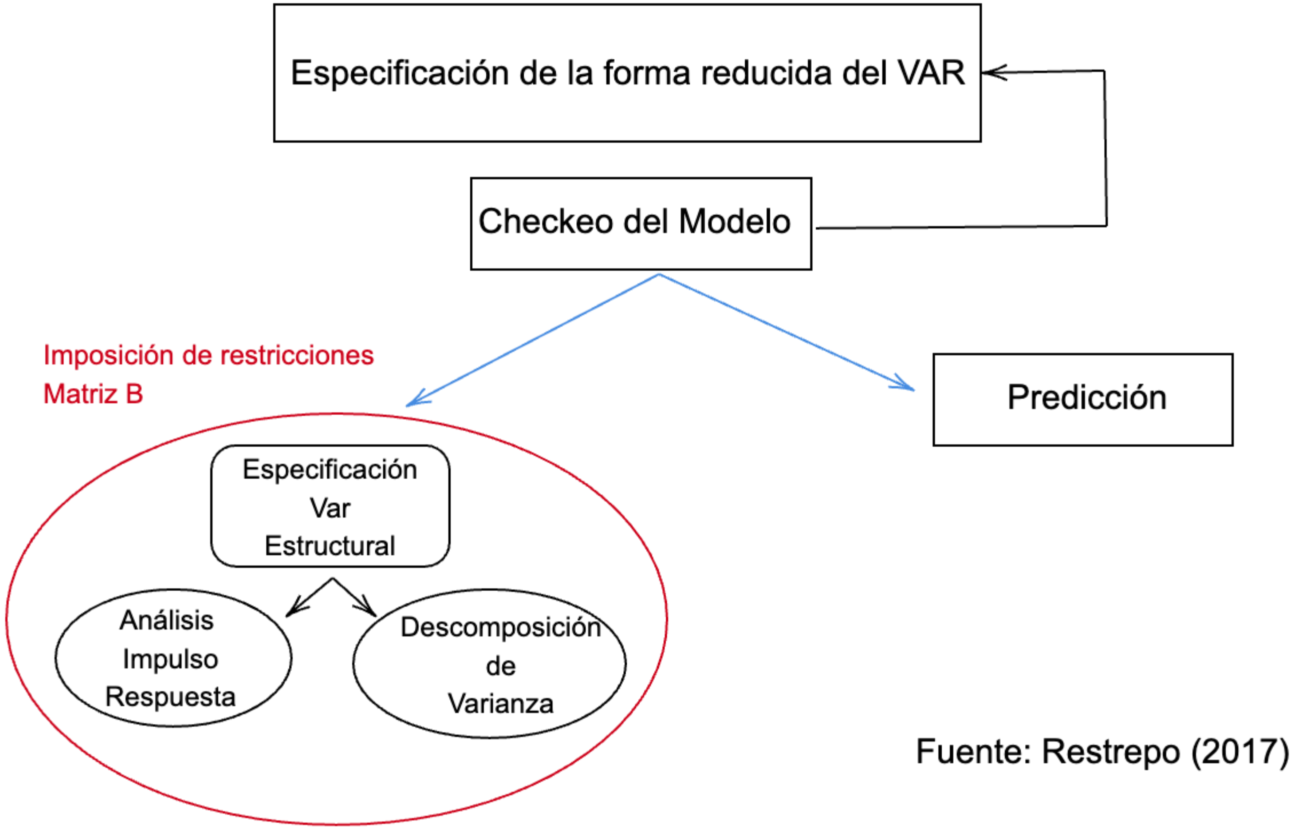


Figura 1: Estructura de Modelamiento

Modelos VAR

☕ Los modelos VAR parten de una forma *estructural* o primitiva que requiere ser transformada a una forma reducida.

☕ En principio se muestra un sistema de ecuaciones con dos variables: PIB (Y_t) y Tasa de interés (X_t) que se retroalimentan. Si se asume un modelo VAR(1), entonces:

Considere un modelo bivariado (Y_t, X_t) y de primer orden:

$$Y_t = \beta_{10} - \beta_{11} X_t + \gamma_{11} Y_{t-1} + \gamma_{12} X_{t-1} + \epsilon_{yt}$$

$$X_t = \beta_{20} - \beta_{21} Y_t + \gamma_{21} Y_{t-1} + \gamma_{22} X_{t-1} + \epsilon_{xt}$$

Donde

- Tanto X y Y son endógenas.
- Los términos de error del modelo $(\epsilon_{yt}, \epsilon_{xt}) \sim \ R.B(0, \sigma^2)$.
- Habría que estimar 10 términos (8 parámetros y dos desviaciones del error de cada variable endogena).

Modelos VAR

Modelo en forma estructural

$$Y_t = \beta_{10} - \beta_{11}X_t + \gamma_{11}Y_{t-1} + \gamma_{12}X_{t-1} + \epsilon_{yt}$$

$$X_t = \beta_{20} - \beta_{21}Y_t + \gamma_{21}Y_{t-1} + \gamma_{22}X_{t-1} + \epsilon_{xt}$$

Tenemos que:

- β_{11} es el efecto contemporáneo de una unidad de cambio de X_t sobre Y_t
- β_{21} es el efecto contemporáneo de una unidad de cambio de Y_t sobre X_t
- γ_{12} y γ_{12} son los efectos de los rezagos de Y_t y X_t sobre Y_t
- γ_{21} y γ_{22} son los efectos de los rezagos de Y_t y X_t sobre X_t

Si β_{11} no es cero, ε_{rt} tiene un efecto contemporáneo indirecto sobre Y_t. Es decir, un choque en X_t afecta a Y_t.

Las ecuaciones del sistema no se pueden estimar por MCO debido a la existencia de esos efectos contemporáneos β_{11} y β_{21} que generan endogeneidad por doble causalidad, lo que lleva a estimar estimadores sesgados.

Modelos VAR

VAR FORMA ESTRUCTURAL

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix}}_{X_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{pmatrix}}_{G_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}}_{G_1}\underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix}}_{X_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{pmatrix}}_{\varepsilon_t}$$

Desde luego podemos imponer un modelo estructural de tal forma que:

$$BX_t = G_0 + G_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

La forma estructural da para 10 parámetros, lo que es 8 coeficientes y dos varianzas de los errores $\sigma_{\varepsilon y}$ y $\sigma_{\varepsilon x}$

Note que la diagonal de la matriz de covarianza es igual a (1), la razón es que se normalizó - *es un criterio que se impone*

Modelos VAR

Prueba VAR representación matricial (un parentesis):

✈ *En algunas ocasiones* puede preguntarse como puedo demostrar que en realidad es un modelo VAR.

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times Y_t + \beta_{12} X_t \\ \beta_{21} Y_t + 1 \times X_t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} Y_t = -\beta_{12} X_t \\ X_t = -\beta_{21} Y_t \end{array}$$

Desde luego tenemos para la siguiente parte:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} Y_{t-1} + \gamma_{12} X_{t-1} \\ \gamma_{21} Y_{t-1} + \gamma_{22} X_{t-1} \end{pmatrix}$$

Modelos VAR

A partir de la forma estructural del VAR cuya ecuación viene siendo: $BX_t = G_0 + G_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$, se puede estimar una forma reducida, para ello se premultiplica la matriz B^{-1} (matriz inversa) en ambos lados de la ecuación, de tal forma que:

$$\underbrace{B^{-1}B}_{I}X_t = \underbrace{B^{-1}G_0}_{A_0} + \underbrace{B^{-1}G_1}_{A_1}X_{t-1} + \underbrace{B^{-1}\varepsilon_t}_{e_t}$$

De esta manera se obtiene una forma reducida de tal forma que: $X_t = A_0 + A_1 X_{t-1} + e_t$, donde e_t es el error reducido y cumple con:

- $E[e_t] = 0$
- $E[e_t, e_t'] = \Sigma$

La matriz Σ no es mas que la matriz de varianzas y covarianzas para esta forma reducida con tres (3) parámetros $(\sigma_y^2, \sigma_x^2, \sigma_{yx}^2)$

Lo que es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx}^2 \\ \sigma_{yx}^2 & \sigma_x^2 \end{pmatrix}$$

Modelos VAR

La forma reducida del VAR $X_t = A_0 + A_1 X_{t-1} + e_t$, tambien puede verse como:

$$X_t = \begin{Bmatrix} Y_t \\ X_t \end{Bmatrix}, A_0 = \begin{Bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{Bmatrix}, A_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}, e_t = \begin{Bmatrix} e_y \\ e_x \end{Bmatrix}$$

Todas tamaño de $n \times 1$ con exepción de A_1, que viene a ser $n \times n$. Lo anterior podemos expresarlo como:

$$\begin{aligned} Y_t =& a_{10} + a_{11} Y_{t-1} + a_{12} X_{t-1} + e_{yt} \\ X_t =& a_{20} + a_{21} Y_{t-1} + a_{22} X_{t-1} + e_{xt} \end{aligned}$$

De esta forma reducida, observe que no hay efectos contemporáneos directos tal como β_{11} y β_{21}, sin embargo no estan eliminados, estan dentro del residuo e_t.

En esta forma, solo se cuentan 9 parámetros: seis (6) coeficientes, una (1) covarianza y dos (2) varianzas respectivamente. Los errores en la forma reducida tienen relación los errores.

Modelos VAR

Cuando se tiene la opción reducida del VAR, tenemos un resultado importante:

$$e_t = B^{-1}\varepsilon_t$$

- ε_t es el error de forma estructural
- e_t es el error de forma reducida.

Con la forma reducida si se puede vía MCO y ademas se pueden hacer los pronosticos.

De esta forma reducida no se modelan las relaciones contemporáneas entre variables, esto requiere de los modelos estructurales y de la identificación del VAR.

Identificación del VAR

Identificación del VAR

Cuando se habla de identificación del VAR se hace alusión a la imposición de *restricciones* o condiciones para poder estimar unos parámetros. Veamos esto con un ejemplo más ilustrativo, olvidemos por un momento que hablamos de VAR. Tenemos una ecuación cualquiera dada por:

$$AX - BY = 0$$

Esa es una relación estructural y queremos conocer cuanto valen A y B (2 parámetros).

Ahora se despeja Y, al hacerlo se puede hablar de obtener una forma reducida (esto ya es una forma funcional, más que una relación).

$Y = AX/B$ y ademas $A/B = C$, así la forma reducida queda $Y = CX$. Si se corriera una regresión, se podría hallar el parámetro C, es decir, un (1) parámetro.

Nuestro objetivo inicial era encontrar A y B (2 parámetros), pero con la forma reducida solo encontramos C (1 parámetro).

El problema anterior es el mismo que se presenta en VAR, no se pueden encontrar A y B (en forma estructural). Por ello debe ponerse una restricción o condición. Por ejemplo que $B = 1$, Así $A/B = C$, $A/1 = C$, $A = B$!

Identificación del VAR

- La identificación del VAR permitirá revelar las relaciones entre las variables y su dinámica, de esto se trata.
- En el caso de la relación entre PIB (Y_t) y la Tasa de interés (X_t), se sabe que los Bancos centrales modifican la tasa de interés ante los datos observados de PIB, de esta manera, si se reporta un dato de crecimiento negativo entonces se procede a bajar la tasa de interés. Ahora bien, esa reducción de la tasa de interés no afectará el PIB inmediatamente.
- Frente a lo anterior, por un lado se puede concluir que el PIB afecta contemporáneamente y con rezagos a la tasa de interés.

Por otro lado, se entiende que solo los rezagos de la tasa de interés afectan al PIB, es decir no hay efecto contemporáneo.

Identificación del VAR

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix}}_{X_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{pmatrix}}_{G_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}}_{G_1} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix}}_{X_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{pmatrix}}_{\varepsilon_t}$$

Si implantamos una restricción en el efecto contemporáneo, entonces vamos a tener

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_{21} & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix}}_{X_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{pmatrix}}_{G_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}}_{G_1} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix}}_{X_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{pmatrix}}_{\varepsilon_t}$$

Identificación del VAR

Lo que ahora nos da un sistema de tal manera que:

$$\begin{aligned} Y_t =& \beta_{10} + \gamma_{11} Y_{t-1} + \gamma_{12} X_{t-1} + \varepsilon_{yt} \\ X_t =& \beta_{20} - \beta_{21} Y_t + \gamma_{21} Y_{t-1} + \gamma_{22} X_{t-1} + \varepsilon_{xt} \end{aligned}$$

Asi, que de forma estructural tendrá (9) parámetros, que es lo mismo con la forma reducida.

Es claro que una matriz con una restricción:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

También cambiará la estructura de B^{-1} y por ende su forma reducida. La identificación permite develar las relaciones entre variables y realizar las impulso respuestas y desde luego descomponer la varianza.

Premultiplicando vamos a tener ahora a:

$$B^{-1} B X_t = B^{-1} G_0 + B^{-1} G_1 X_{t-1} + B^{-1} \varepsilon_t$$

esto nos lleva a:

Identificación del VAR

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{pmatrix}$$

Desde luego simplificando lo anterior -esto es resolviendo cada fila con columna-

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ -\beta_{21}\beta_{10} + \beta_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ -\beta_{21}\gamma_{11} + \gamma_{21} & -\beta_{21}\gamma_{12} + \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ -\beta_{21}\varepsilon_{yt} + \varepsilon_{xt} \end{pmatrix}$$

Ademas que e_t cambia su forma y esto se traduce en:

$$\begin{aligned} e_{xt} &= -\,\beta_{21} e_{yt} + \varepsilon_{xt} \\ e_{xt} + \beta_{21} e_{yt} &= \varepsilon_{xt} \end{aligned}$$

La relación anterior es clave, pues está mostrando que por medio de una combinación lineal de choques o errores de la forma reducida $(e_{xt}\ y\ e_{yt})$ y el efecto contemporáneo β_{21}, se recuperan los choques estructurales de la tasa de interés ε_{xt}.

Identificación del VAR

🎨 Estimar un VAR de mayor orden, deben imponerse mas restricciones, por lo cual debe tener en cuenta:

1. En un VAR estructural, el numero de elementos en la matriz B es n^2.
2. En un VAR reducido, en Σ (matriz de covarianza) incorpora efectos contemporaneos que viene a ser $\frac{n(n+1)}{2}$

Por ejemplo: ¿cuantas restricciones se requieren para los siguientes VAR, uno con 3 variables y otro con 4?

Restricciones: $\frac{n^2-n}{2} = \frac{3^2-3}{2} = 3$ y para el otro $\frac{4^2-4}{2} = 6$

Al igual que ocurría con los modelos ARIMA, si su parte AR tiene raíces invertibles menor a 1, es decir se encuentran dentro del circulo unitario, entonces el sistema es estacionario y estable.

En el caso de VAR, se dirá que si la matriz polinómica con operador de rezago A(L) es invertible, el VAR es estacionario y estable.

Continuará...

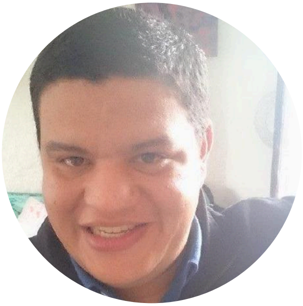
Bibliografía

Rabbi, F., Tareq, S.U., Islam, M.M., Chowdhury, M.A., & Abul Kashem, M. (2020). *A Multivariate Time Series Approach for Forecasting of Electricity Demand in Bangladesh Using ARIMAX Model*. 2020 2nd International Conference on Sustainable Technologies for Industry 4.0 (STI), 1-5.

Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: principles and practice*, 3rd edition, OTexts: Melbourne, Australia.

Shumway, R., & Stoffer, D. (2019). *Time series: a data analysis approach using R*. CRC Press.

¡Gracias!



Modelos VAR

Syllabus/ Curso

@keynes37

cayanes@uninorte.edu.co

Seguimos aprendiendo