Econometría II

ARIMA B

Carlos A. Yanes Guerra

2024-I

Preguntas de las sesiones anteriores?

Recordeis

1. Es estacionario o no estacionario?
2. Qué tipo de autocorrelación manifiestan los patrones de la serie?
3. Posee una variación estacional?
4. Existe algún desplazamiento estructural?

Procesos MA

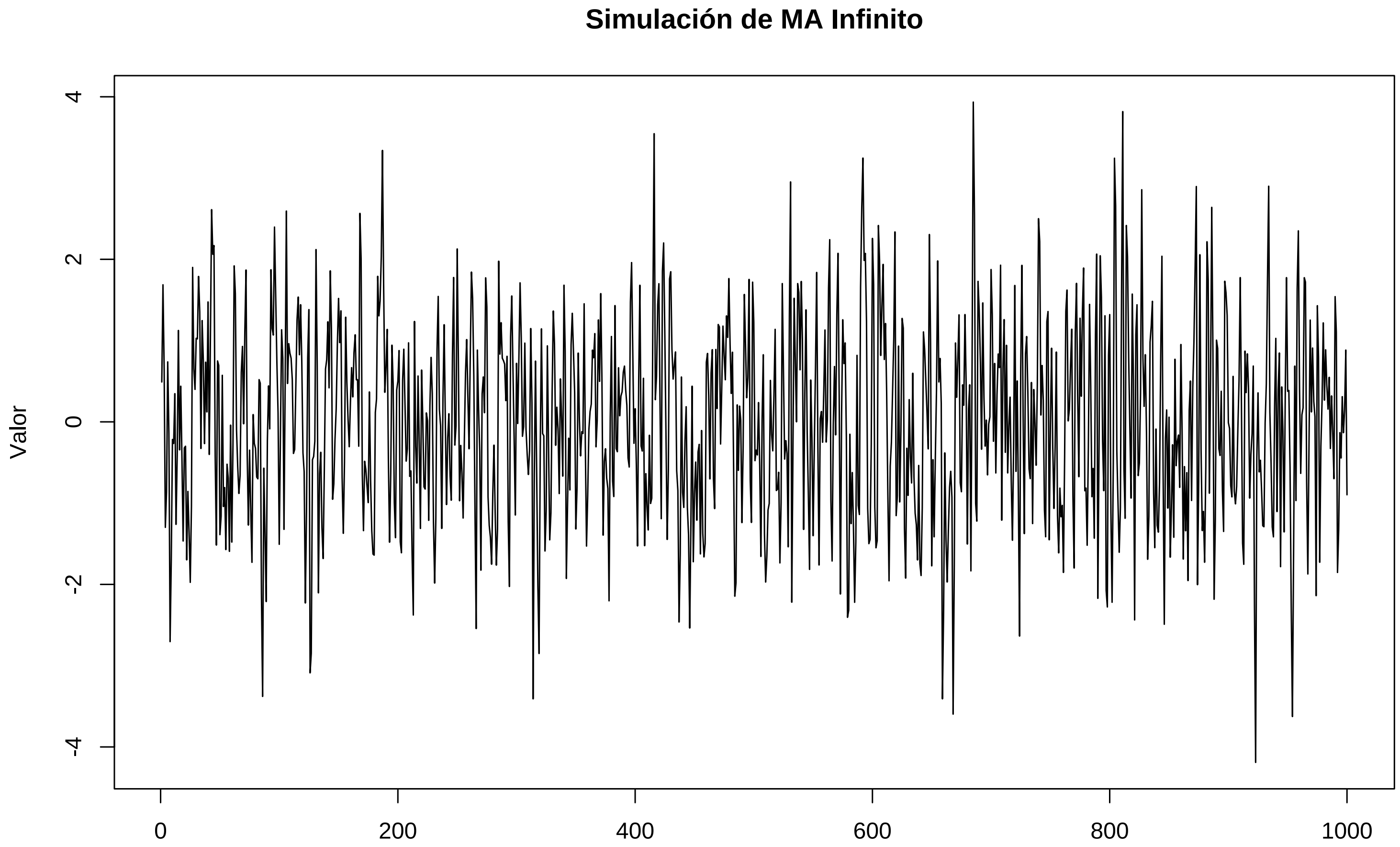
> Los MA(q) son procesos que indican que la serie de tiempo depende de los errores pasados. Al igual que los AR(p), sirven para modelar y pronosticar desde el modelo univariado los periodos futuros

Algunas características de este proceso son:

- Un MA(1) se representa como: $y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$
- Un MA(2) se representa como: $y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2}$
- Un MA(q) se representa como: $y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$

Procesos MA

Existe en series de tiempo un *teorema* y es el que nos dice que cualquier serie que es estacionaria puede representarse mediante un MA(q) de orden infinito. Esto lo dice Wold(1936).



Procesos MA

Determine si el Proceso MA es estacionario en media y varianza

$$y_t = a + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

$$E[y_t] = E[a + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t]$$

$$E[y_t] = a + \theta_1 E[\epsilon_{t-1}] + E[\epsilon_t]$$

Recordemos que por ruido blanco eso es $\sim (0, \sigma^2)$

$$\boxed{E[y_t] = a}$$

No depende de (t).

Procesos MA

Vamos ahora con la varianza:

$$y_t = a + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

$$Var[y_t] = Var[a + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t]$$

$$Var[y_t] = \theta_1^2 Var[\epsilon_{t-1}] + Var[\epsilon_t]$$

Recordemos nuevamente que por ruido blanco eso es $\sim (0, \sigma^2)$

$$Var[y_t] = \theta_1^2 \sigma^2 + \sigma^2$$

$$Var[y_t] = \sigma^2(\theta_1^2 + 1)$$

Tambien piense que la varianza se escribe como γ_0

$$\boxed{\gamma_0 = \sigma^2(\theta_1^2 + 1)}$$

Procesos MA

El asunto de la covarianza permite gráficar e identificar los procesos concernientes a la autocorrelación y por ende tener las funciones de autocorrelación simple y parcial.

$$cov[y_t, y_{t-s}] = \theta_1^2 cov[\epsilon_{t-1}, \epsilon_{(t-s)-1}] + cov[\epsilon_t, \epsilon_{t-s}]$$

$$\gamma_0 = \theta_1^2 \sigma^2 + \sigma^2$$

Entonces si $s = -1, 1 \Rightarrow \quad \gamma_1 = \theta_1 \sigma^2$

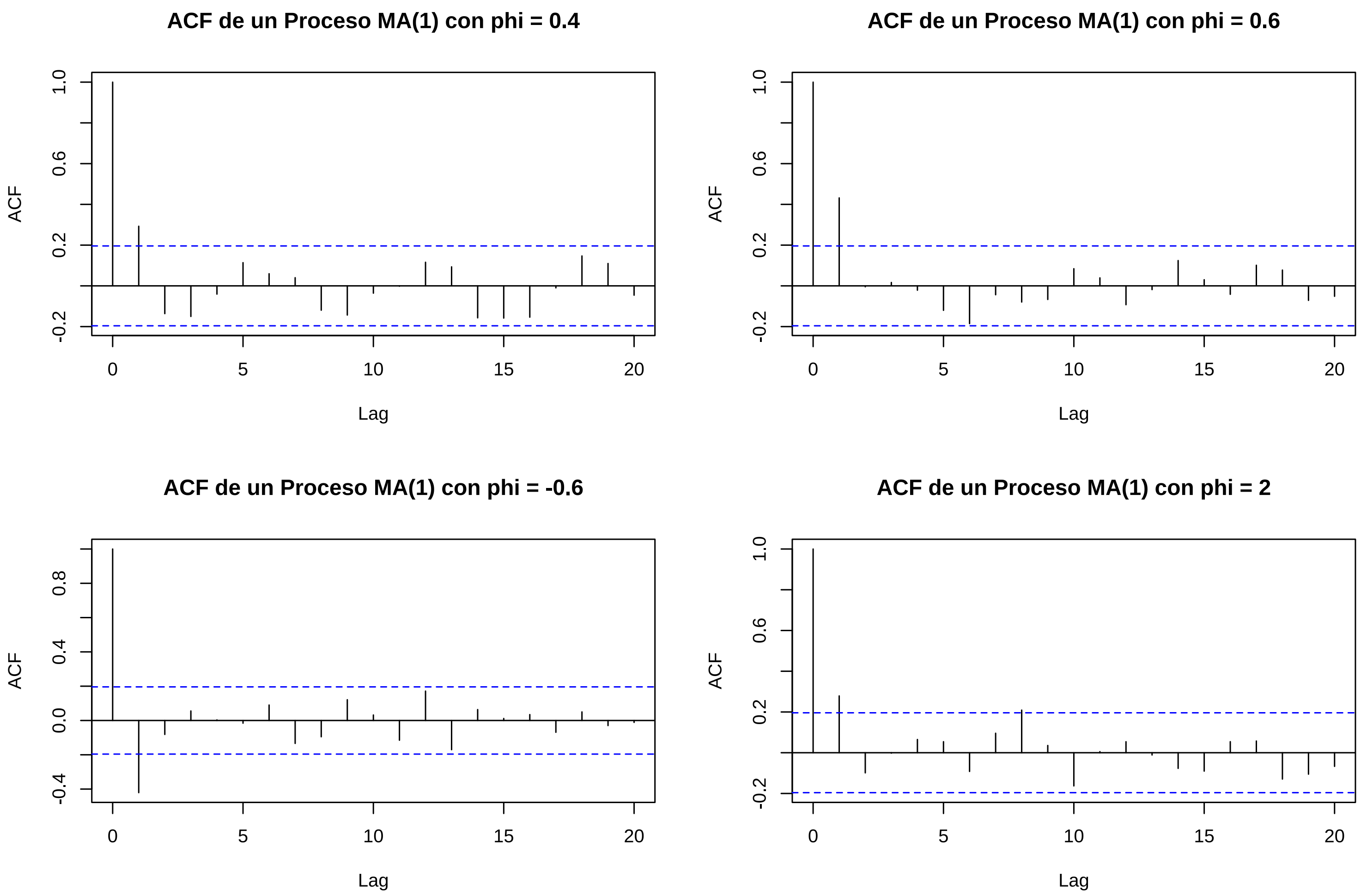
Entonces si $s = 2 \Rightarrow \quad \gamma_2 = 0$

Entonces si $s = 3 \Rightarrow \quad \gamma_3 = 0$

Dicho mejor

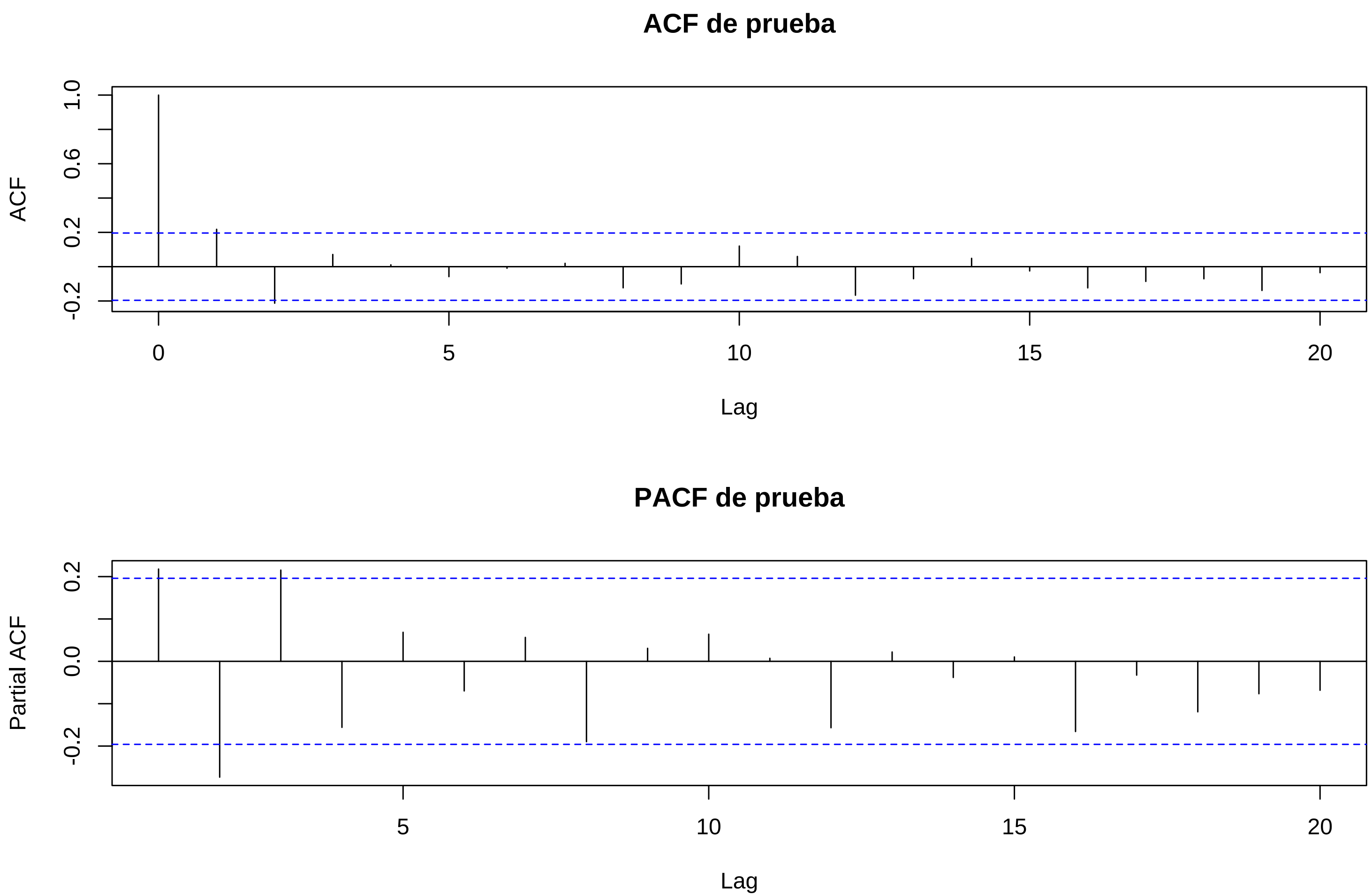
$$\rho = \begin{cases} 1 & si \quad s = 0 \\ \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & si \quad s = 1, -1 \\ 0 & \text{de otro lado} \end{cases}$$

Procesos MA

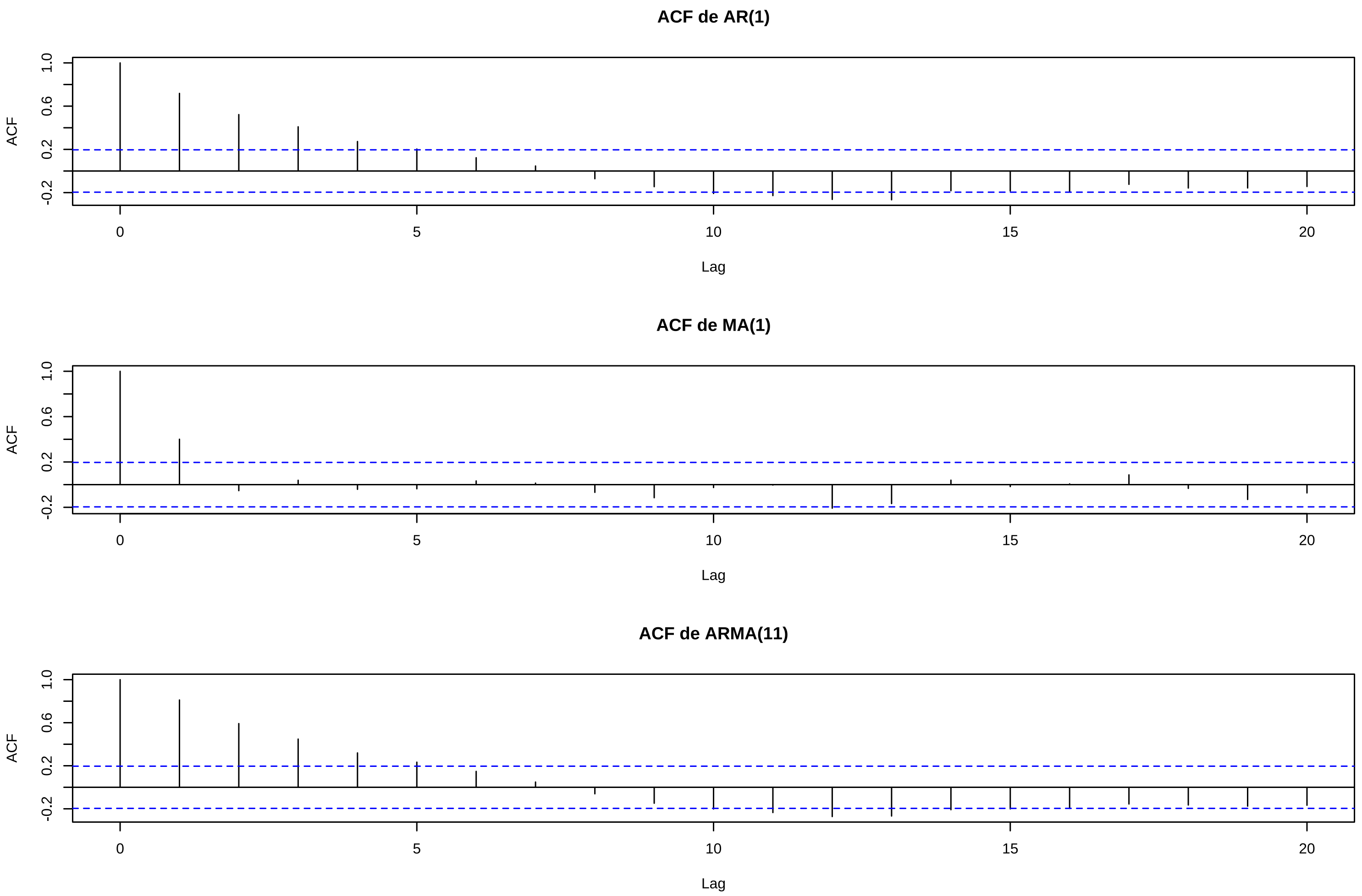

ACF de un Proceso MA(1) con phi = 0.4
ACF de un Proceso MA(1) con phi = 0.6
ACF de un Proceso MA(1) con phi = -0.6
ACF de un Proceso MA(1) con phi = 2
ACF
Lag
0
5
10
15
20
1.0
0.6
0.2
-0.2
0.8
0.4
0.0
-0.4

Procesos MA

✈ Preguntemos algo: Intente identificar el orden del siguiente modelo



Procesos MA


ACF de AR(1)
ACF
1.0
0.6
0.2
-0.2
0
5
10
15
20
Lag
ACF de MA(1)
ACF
1.0
0.6
0.2
-0.2
0
5
10
15
20
Lag
ACF de ARMA(11)
ACF
1.0
0.6
0.2
-0.2
0
5
10
15
20
Lag

Procesos MA

- Identificar los modelos por sus respectivas ACF y PACF es mejor que estar haciendo 1000 modelos y encontrar el modelo con menor criterio AIC o BIC.

- Dentro de los criterios, recordando nuevamente su formulación pero en términos de varianza:

Criterio de AKAIKE: Es el menos estricto de todos, no es consistente pero si eficiente.

$$AIC = ln(\sigma^2) + \frac{2k}{T}$$

Criterio de BAYES: Es el mejor, castiga (sobre parametrización), es consistente pero no muy eficiente (no robusto en residuos).

$$BIC = ln(\sigma^2) + \frac{k}{T}Ln(T)$$

Donde (σ^2) es la varianza de los errores (residuos del modelo), (k) el número de parámetros (p+q+1) si se incluye la constante y de (p+q) si se omite y por último (T) es el numero de observaciones.

Procesos MA

Ejercicio 1:

Qué modelo es mejor?

# Lags	AIC	BIC	R2
0	1.095	1.076	0.000
1	1.067	1.030	0.056
2	0.955	0.900	0.181
3	0.957	0.884	0.203
4	0.986	0.895	0.204
5	1.016	0.906	0.204
6	1.046	0.918	0.205

R./ Note que depende que quiere ver el investigador. Si desea muchos rezagos lo mejor es tomar entonces el $\bar{R}^2_{adj}$. El BIC penaliza la sobreparametrización y el AIC es un poco mas intermedio.

Otras consideraciones de los Procesos MA 😛

Invertibilidad

> Un proceso MA es invertible si:

Considere el modelo MA:

$$y_t - \mu = (1 + \theta L)\epsilon_t$$

$$E(\epsilon_t, \epsilon_s) = \begin{cases} \sigma^2 & si \quad s = t \\ 0 & \text{de otro lado} \end{cases}$$

$$Si \quad |\theta| < 1$$

$$(1 + \theta L)^{-1}(y_t - \mu) = \epsilon_t$$

$$(1 - \theta L + \theta^2 L^2 - \theta^3 L^3 + \cdots)(y_t - \mu) = \epsilon_t$$

Es Invertible AR(p) ✔

Invertibilidad

> Dentro de las condiciones de invertibilidad también debe tenerse en cuenta las raíces complejas y esto es $1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q z$, en un plano complejo deben caer por fuera del circulo unitario

Esto es condicionante de:

- Para procesos de $q = 1$: $-1 < \theta_1 < 1$
- Para procesos de $q = 2$: $-1 < \theta_2 < 1$ pero $\theta_2 + \theta_1 > -1$ o $\theta_1 - \theta_2 < 1$
- Para procesos de $q = 3$ es mas complejo... pero los softwares responden por ello.

Con respecto a los modelos Diferenciados!!

Ejemplo

Punto: Suponga que le ha tocado hacer un modelo y pronostico para inflación. El resultado de todo, término siendo:

$$\Delta Inf_t = -0.0145 - .3215\Delta inf_{t-1}$$

$Inf_{2021:3} = 6.53\%$ es la inflación del respectivo año 2021 en el mes 3.

La inflación del siguiente periodo fué $Inf_{2021:4} = 6.56\%$. Note que si diferenciamos tendremos

$$Inf_{2021:4} - Inf_{2021:3} = 0.029$$

Reemplazamos ese valor en nuestro modelo original:

$$\Delta Inf_t = -0.0145 - .3215(0.029) = -0.02382$$

Lo que usando el último valor del mes:

$$Inf_{2021:3} + \Delta_{2021:4} \Rightarrow 6.56 - 0.02382 = 6.54\%$$

Modelo SARIMA

Modelo Sarima

ARIMA	$\underbrace{(p, d, q)}$	$\underbrace{(P, D, Q)_m}$
	$\uparrow$	$\uparrow$
	Parte NO estacional del modelo	Parte estacional del modelo

Donde $m =$ número de observaciones por año.

Los modelos SARIMA, permiten no tener raices estacionales. Recuerde que no ser estacionario tiene muchos problemas a la hora de pronosticar.

Modelo Sarima

La parte estacional de un modelo AR o MA se verá en los rezagos estacionales de PACF y ACF.

Un $ARIMA(0,0,0)(0,0,1)_{12}$ mostrará:

- Un pico en el lag 12 del ACF pero ningún otro pico significativo.
- El PACF mostrará un decaimiento exponencial en los rezagos estacionales; es decir, en los rezagos $12, 24, 36, \ldots$.

Un $ARIMA(0,0,0)(1,0,0)_{12}$ mostrará:

- Decaimiento exponencial en los rezagos estacionales de la ACF
- Un único pico significativo en el lag 12 en el PACF.

Bibliografía

📕 Chatfield, C. (2000). *Time-series forecasting*. CRC press.

📕 Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: principles and practice*, 3rd edition, OTexts: Melbourne, Australia.

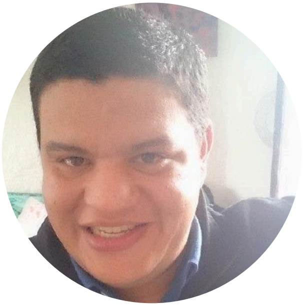
📕 Shumway, R., & Stoffer, D. (2019). *Time series: a data analysis approach using R*. CRC Press.

📕 Campo, J. Notas de clase (MIMEO)

¡Gracias!

Modelos MA

Seguimos aprendiendo



Syllabus/ Curso

@keynes37

cayanes@uninorte.edu.co