Econometría II

ARIMA

Carlos A. Yanes Guerra

2024-I

Preguntas de las sesiones anteriores?

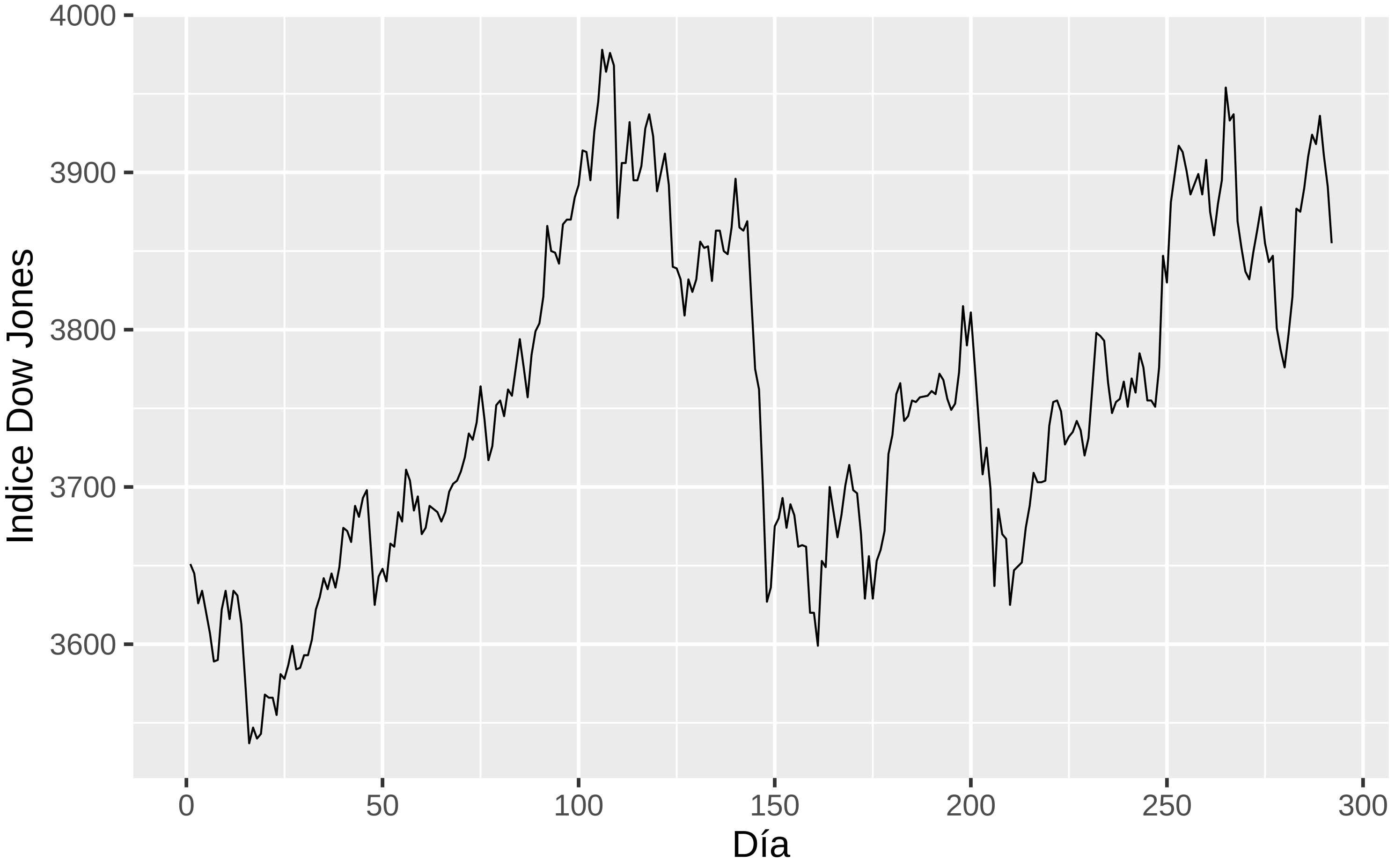
Estacionariedad

> Una serie de tiempo $\{y_t\}$ es estacionaria si para cualquier ρ, la distribución de $(y_t, \ldots, y_{t+\rho})$ no depende de t.

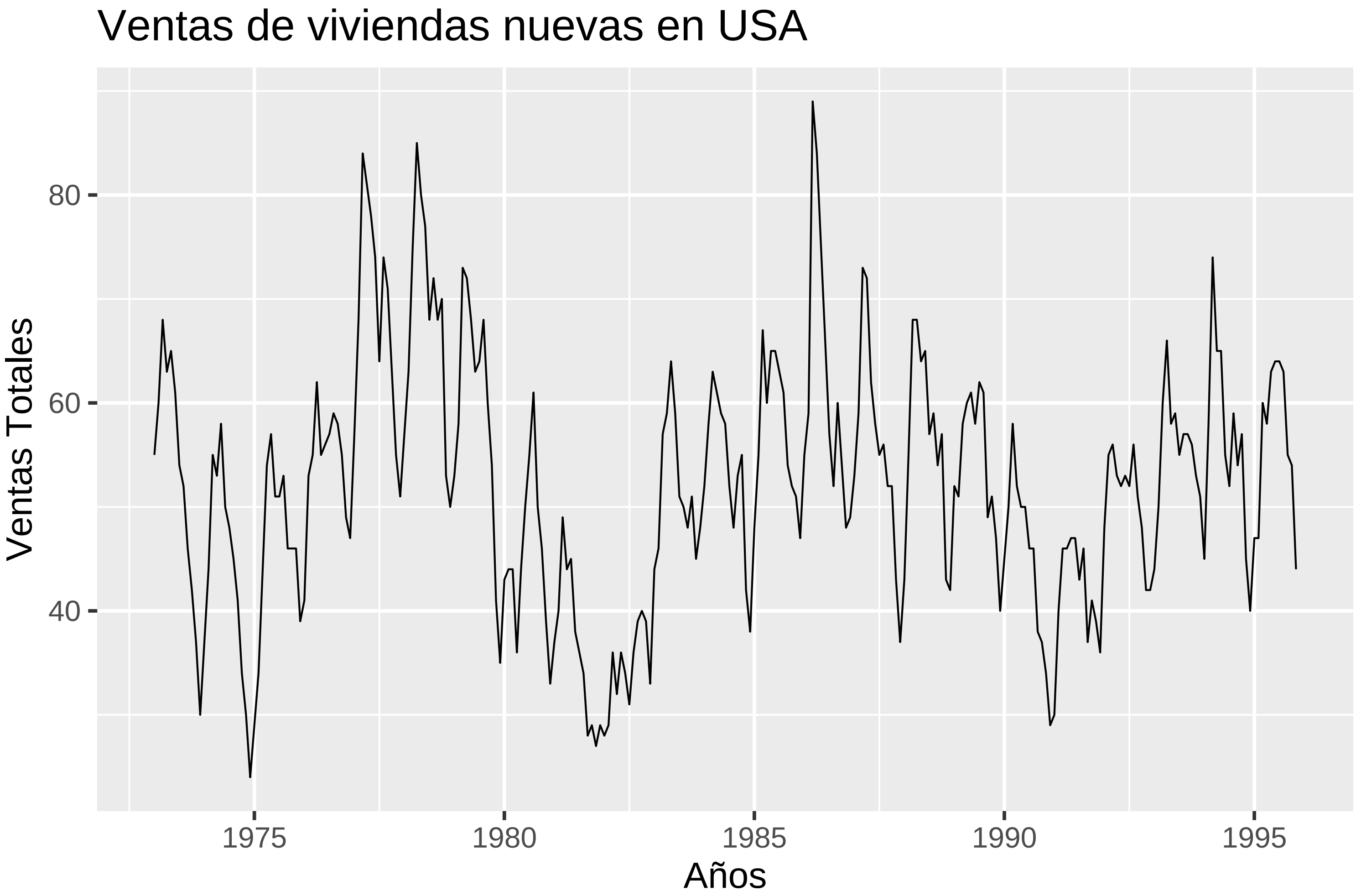
Por ende, una serie es estacionaria si:

- Aproximadamente tiene comportamiento horizontal
- Es Varianza Constante
- No posee patrones predecibles a largo plazo

Estacionariedad



Estacionariedad



Estacionariedad

Y_t es autorregresivo de orden 1 si:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \epsilon_t,\ RB\ \epsilon_t \sim (0, \sigma^2)$$

Con $|\alpha_1| < 1$

Un modelo autorregresivo mas general será constituido:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_i \sum_{i=1}^{\rho} Y_{t-i} + \epsilon_t$$

Tome en consideración la detección de la media del proceso:

$$\mu_y = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}$$

Note que $|\alpha_1 + \alpha_2| < 1$. Esto es muy importante tener en cuenta.

Estacionariedad

Polinomio característico

$$AR(\rho): \quad y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \alpha_\rho y_{t-\rho} + e_t$$

$$y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \cdots - \alpha_\rho y_{t-\rho} = \alpha_0 + e_t$$

$$y_t - \alpha_1 L y_t - \alpha_2 L^2 y_t - \alpha_\rho L^\rho y_t = \alpha_0 + e_t$$

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \alpha_\rho L^\rho) y_t = \alpha_0 + e_t$$

Por consiguiente podemos entonces tener:

$$A(L) y_t = \alpha_0 + e_t$$

Estacionariedad

Polinomio característico forma 1:

$$m^p - \alpha_1 m^{p-1} - \alpha_2 m^{p-2} - \cdots - \alpha_{p-2} m^2 - \alpha_{p-1} m - \alpha_p = 0$$

Bajo esa condición todas las raices p deben caer dentro del circulo unitario (ser menores a 1 en valor absoluto).

$$-\alpha_p z^p - \alpha_{p-1} z^{p-1} - \alpha_{p-2} z^{p-2} - \cdots - \alpha_2 z^2 - \alpha_1 z - 1 = 0$$

En este enfoque de especificación (Forma 2), las raíces deben caer por fuera del circulo unitario

Estacionariedad

Constituir la detección radica en: (Tome por ejemplo)

$$Y_t = \alpha_0 + 0.25Y_{t-1} + 0.125Y_{t-2} + \epsilon_t$$

Que despejando y desarrollando queda como:

$$Y_t - 0.25Y_{t-1} - 0.125Y_{t-2} = \alpha_0 + \epsilon_t$$

Solo debe aplicar los operadores rezagos queda:

$$Y_t - 0.25L^1 - 0.125L^2 = \alpha_0 + \epsilon_t$$

Como resultado las raíces del polinomio quedan:

$$Z_1 = 2 \quad Z_2 = -4$$

Ambas raíces quedan por fuera del circulo unitario (lo teórico), por ende el proceso es estacionario. En algunas partes hablan de la inversa del circulo unitario

Estacionariedad

Un modelo AR(1), es aún mas facil de decir si es estacionario o no:

$$Y_t = \alpha_0 + 0.33Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Se resuelve muy sencillo de la forma:

$$Y_t - 0.33Y_{t-1} = \alpha_0 + \epsilon_t$$

Factorizando, luego simplificando la ecuación y únicamente nos quedamos con la ecuación característica (Remplazando $(Y_t = Z_t)$ vamos a tener:

$$Z_t - 0.33Z_{t-1} = 0 \; ; \; (1 - 0.33Z_t) \rightarrow \frac{1}{0.33} = Z_t$$

.

La raíz de un AR(1) por consiguiente es $z = \frac{1}{\alpha}$ y siempre y cuando $|\alpha| < 1$ el proceso carecera de tendencia estocástica

Estacionariedad

Problema con raíz unitaria

- Una caminata aleatoria es un ejemplo de esto, es una especie de AR $(\rho) = 1$ o con $\alpha_1 = 1$.
- Si el regresor α_1 tiene raíz unitaria, la serie de tiempo podrá tener distribución muy distinta a la normal. Incluso aún teniendo muestras grandes.
- Si dos (2) series estan correlacionadas y ambas poseen raíz unitaria entonces tendremos el fenómeno de regresión espuria.
- Las series que poseen raíz unitaria podran estar sesgadas a cero(0).
- Los correlogramas y la prueba de raíz unitaria fue propuesta por Dickey-Fuller en 1970.

Estacionariedad

Test de Dickey-Fuller

Sea una serie:

$$y_t = \rho y_{t-1} + e_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \rho y_{t-1} - y_{t-1} + e_t$$

Lo que viene a ser:

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + e_t$$

$$\Delta y_t = a y_{t-1} + e_t$$

Si $\rho = 1$, entonces la serie sigue una caminata aleatoria

Estacionariedad

Test de Dickey-Fuller

Planteamos la hipótesis como:

$$\begin{aligned} H_0 &: a = 0 \\ H_a &: a < 0 \text{ , serie estacionaria} \end{aligned}$$

La forma o manera de hacerlo es:

- Sin constante. *P.e:* $y_t = a y_{t-1} + e_t$
- Con constante: $y_t = c + a y_{t-1} + e_t$
- Con constante y tendencia: $y_t = c + \beta t_t + a y_{t-1} + e_t$

Podemos incluso asociar el estadístico del Dickey-Fuller que debe ser lo suficientemente grande para así rechazar la hipótesis de raíz unitaria.

Estacionariedad

Resultado del test

```
#> 
#>     Augmented Dickey-Fuller Test
#> 
#> data:  ar2_series
#> Dickey-Fuller = -1.9077, Lag order = 4, p-value = 0.6149
#> alternative hypothesis: stationary
```

Para uno que si es estacionario

```
#> 
#>     Augmented Dickey-Fuller Test
#> 
#> data:  ar2_series
#> Dickey-Fuller = -3.498, Lag order = 4, p-value = 0.04567
#> alternative hypothesis: stationary
```

Estacionariedad

Test de Dickey-Fuller aumentado

En algunas ocasiones puede que e_t el error del modelo no sea RUIDO BLANCO. Para esos casos, lo mejor es implementar el Dickey Fuller aumentado:

$$\Delta y_t = (c+)ay_{t-1}(\beta_0 t) + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \beta_k \Delta y_{t-k} + e_t$$

- La selección óptima de los rezagos, se hace a partir de criterios como el de Akaike, Bayes, entre otros.
- La hipótesis no cambia ni el uso de sus tablas tampoco.

Estacionariedad

Corrección de la NO estacionariedad

La diferenciación permite estabilizar la media. Podemos corregir y tener:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

Mas generalizado y en caso tal aun no sea la serie estacionaria:

$$\begin{aligned}
\Delta Y_t^2 =& \Delta y_t - \Delta y_{t-1} \\
=& (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) \\
=& y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}
\end{aligned}$$

Su uso, solo obedece a estructuras bastante dependientes del tiempo y con demasiada variabilidad.

Autocorrelación y autocovarianzas

Autocorrelación

La autocovarianza γ_s de una serie Y_t y cualquiera de sus rezagos Y_{t-s}, es igual al planteamiento de la formula de la covarianza entre dos variables. Para la autocovarianza del rezago de orden (0), este resulta ser la misma varianza.

$$E\left[(Y_t - E(Y_t))\left(Y_{t-s} - E(Y_{t-s})\right)\right] = \gamma_s$$

$$E\left[(Y_t - E(Y_t))\left(Y_t - E(Y_t)\right)\right] = \gamma_0$$

Autocorrelación

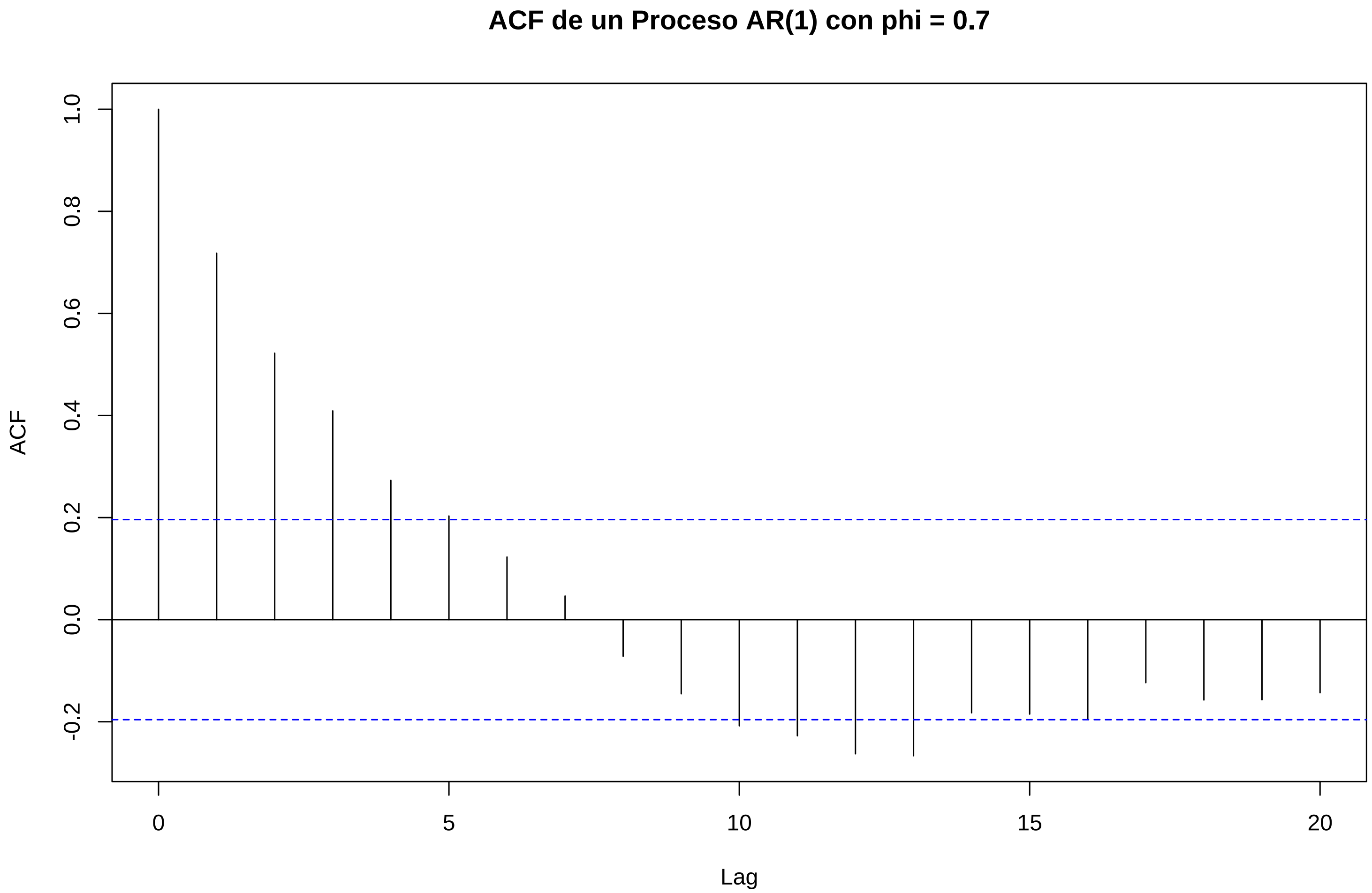
Las **autocovarianzas** dependen sin lugar a duda de las medidas de las series de tiempo, por tanto, es recomendable normalizar el uso de las varianzas que brinda el concepto de correlación, indice que va desde -1 a 1.

$$\tau = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} \text{ o mejor } \rho = \frac{cov(Y_t, Y_{t-s})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t-s})}} = \frac{cov(Y_t, Y_{t-s})}{VarY_t}$$

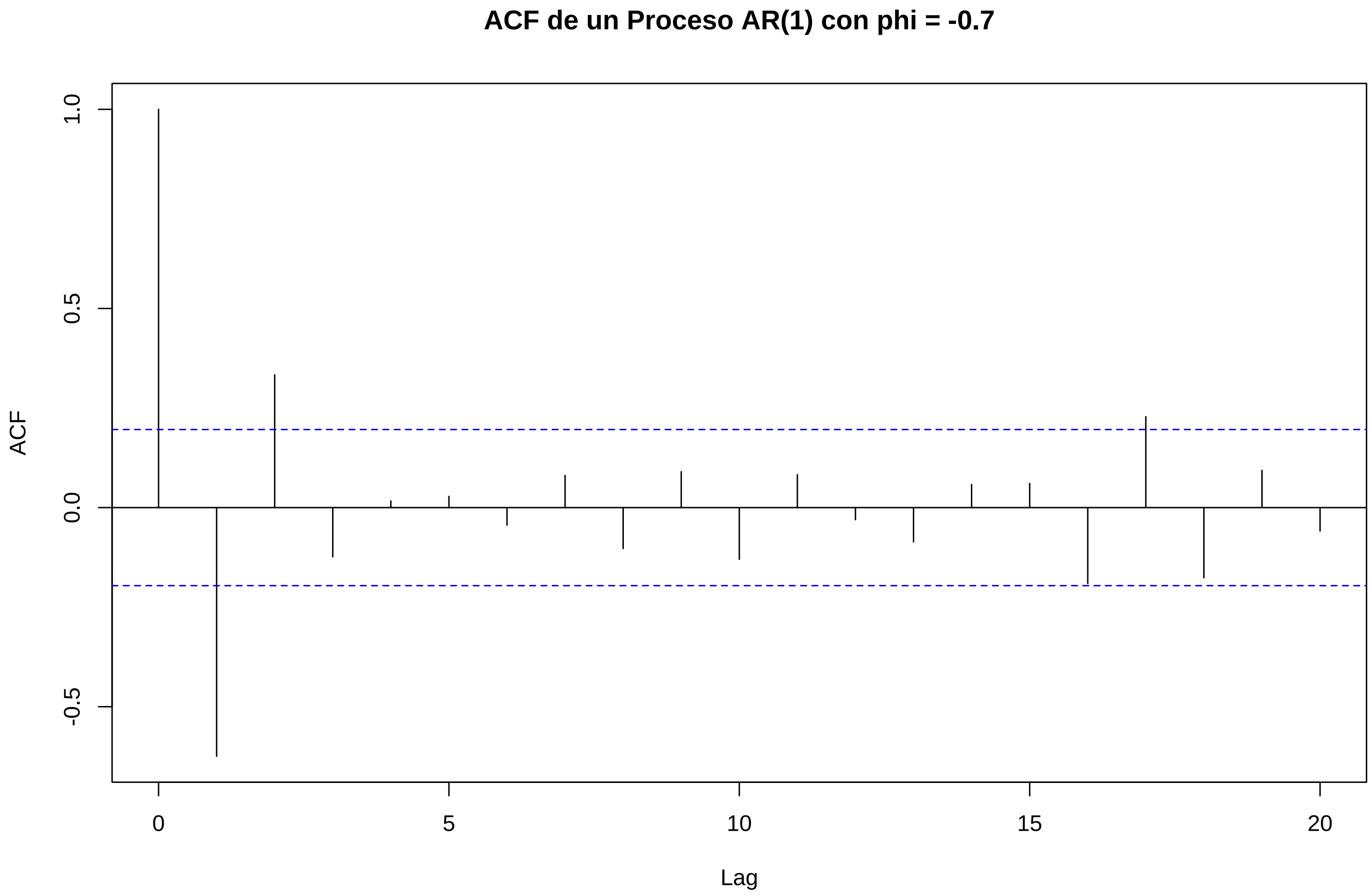
Por ejemplo: para un proceso AR(1) tendríamos una (ACF):

$$\rho_s = \frac{cov(Y_t, Y_{t-s})}{VarY_t} = \frac{\phi_1^s \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1^s$$

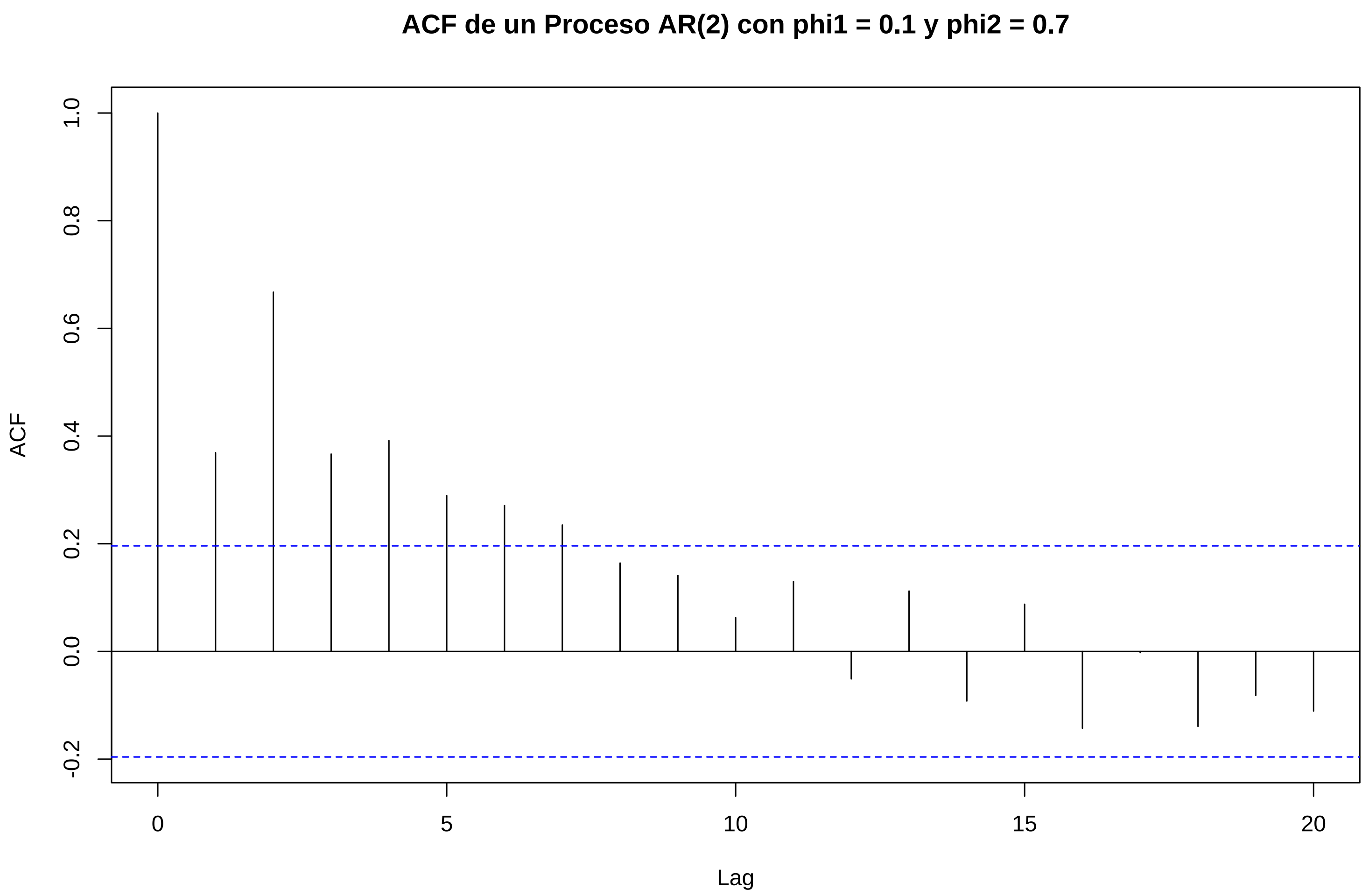
Autocorrelación



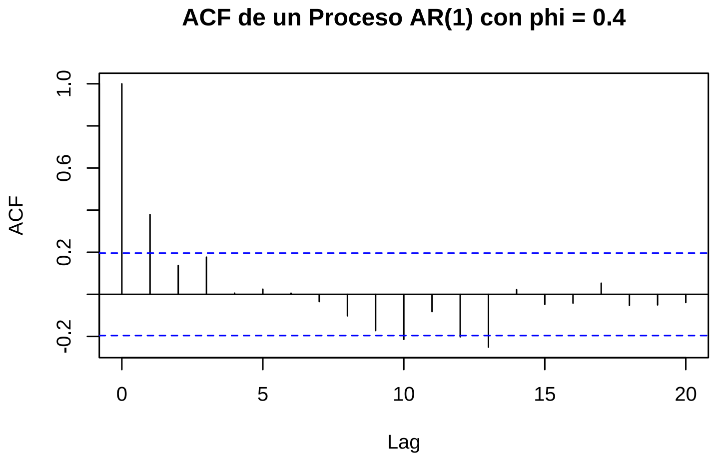
Autocorrelación

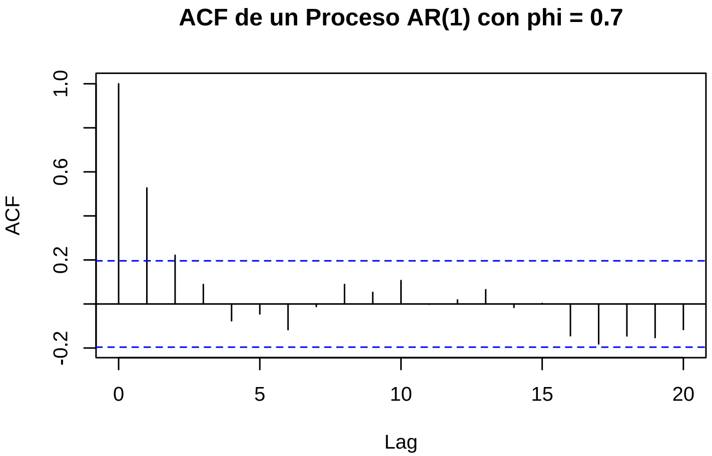


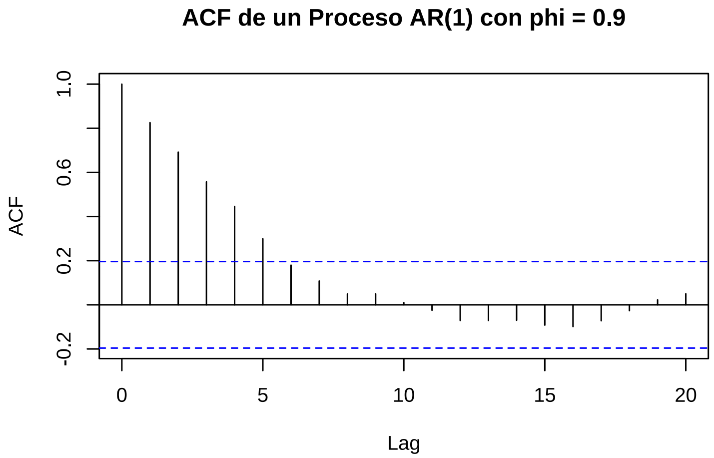
Autocorrelación



Autocorrelación







Autocorrelación

Pregunta: Sea el siguiente proceso:

$$y_t = a + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + e_t$$

Deduzca la función de autocorrelación

Si contamos con estacionariedad:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1 + \phi_2\rho_1 \Rightarrow \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1\rho_1 + \phi_2$$

y en general, $\rho_s = \phi_1\rho_{s-1} + \phi_2\rho_{s-2} \rightarrow \forall s > 0$

Se conoce como las ecuaciones de Yule-Walker ✔

Autocorrelación

Modelo Arima

Podemos establecer que:

$$\underbrace{(1-\phi_1 L)}_{\text{AR}(1)}\ \underbrace{(1-L)y_t}_{\text{Primera diferencia}} = \underbrace{C + (1+\theta_1 L)\epsilon_t}_{\text{MA}(1)}$$

$AR(\rho)$ **:** orden del Autorregresivo

$MA(\theta)$ **:** orden de la media movil.

La diferencia depende del nivel de estacionariedad que requiera la serie, p.e: arima(1,1,1)

Bibliografía

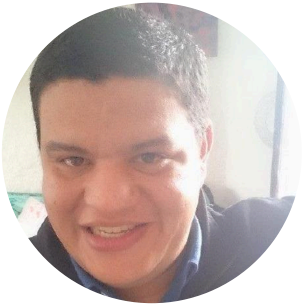
📕 Chatfield, C. (2000). *Time-series forecasting*. CRC press.

📕 Hyndman, R.J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: principles and practice*, 3rd edition, OTexts: Melbourne, Australia.

📕 Shumway, R., & Stoffer, D. (2019). *Time series: a data analysis approach using R*. CRC Press.

📕 Campo, J. Notas de clase (MIMEO)

¡Gracias!



Estacionariedad

Seguimos aprendiendo

Syllabus/ Curso

@keynes37

cayanes@uninorte.edu.co