UNIVERSIDAD DEL NORTE

Economía Matemática

Carlos Yanes Guerra

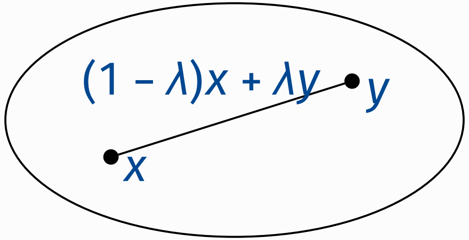
22 de marzo de 2025 — Universidad del Norte

UNIVERSIDAD DEL NORTE

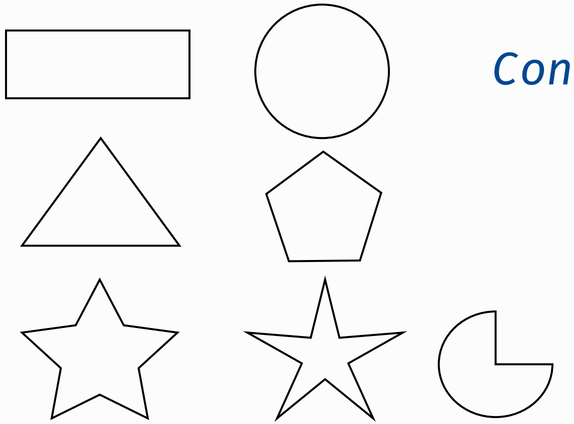
Conjuntos Convexos

Conjuntos

- Vamos a decir que $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si una línea que une a dos puntos cualesquiera en A esta completamente contenido en A
- Si somos formales, A es convexo si para cualquier $x, y \in A$ y un $\lambda \in [0, 1]$, va a salir $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$



Ejemplos

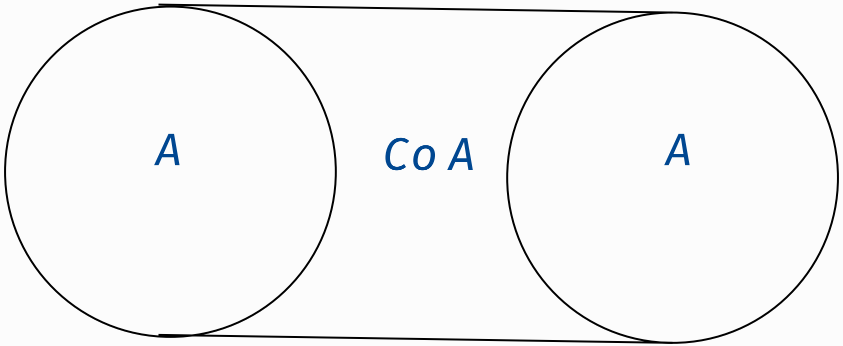


Convexo

No Convexo

Es convexo el siguiente conjunto?

Conjuntos Convexos



Conjuntos Convexos

- Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ cualquier conjunto
- Se muestra un pequeño conjunto de A que se llamará CoA.
- Es CoA bien definido, viene a ser $\{C_i\}_{i\in I}$ un conjunto convexo donde A y $C = {}_{i\in I} C_i$
- Si $x, y \in C$, conociendo que $\lambda \in [0, 1]$ desde que $x, y \in C_i$ y convexo si $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C_i$
- Si lo anterior es convexo, entonces se va encontrar que $A \subset C$ y C la intersección de todos los conjuntos y C va ser un conjunto pequeñito que esta conteniendo A.
- Entonces es un conjunto convexo

Función Convexa

- Ya anteriormente habíamos mirado las condiciones de primer orden y que se podría tomar como suficiente.
- Cuando establecemos las propiedades de la con y cuasiconvexidad se va a encontrar: Para $f : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$, para tener un epigrafo:

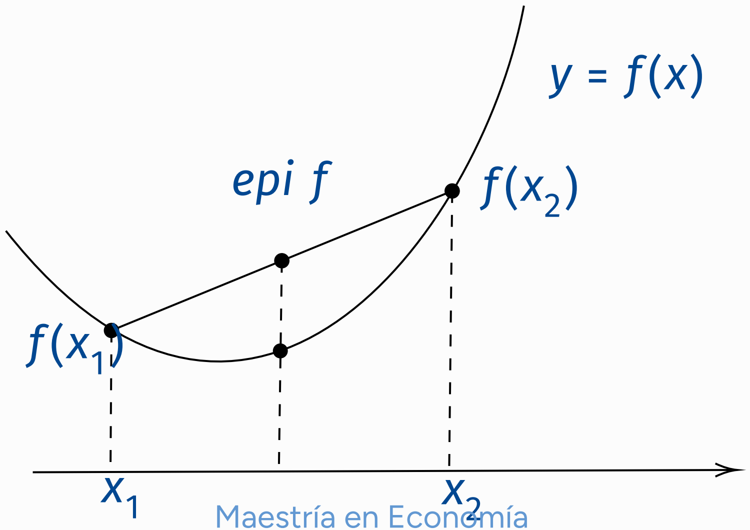
$$epi\ f = \left\{(x, \mu) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : f(x) \leq \mu\right\}$$

- Se va tener que f es una función convexa si el epigrafo f es un conjunto convexo.

Función Convexa

- Es fácil demostrar que si f es convexo si y solo si para cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda \in [0, 1]$, tendremos *desigualdad en la convexidad*

$$f(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$



Función Cuasiconvexa

- Tengamos la siguiente forma;

$$L_f(y) := \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leq y\}$$

Esto se llama conjunto de *contornos inferiores* de f en el nivel y

- Solo hay que exponer que f es quasi-convexa si el contorno inferior son convexos para todos los valores de y.
- Mostrar que f es cuasiconvexa si y solo si cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ y $\lambda \in [0, 1]$, encontramos que:

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)) \leq max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

Matrices

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Formalmente, una matriz (A) de dimensión $m \times n$, donde m viene a ser las filas y n las columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pero contenida en **vectores**. lo que es:

$$\text{una fila}: (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{o una columna} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

Suma y resta

La suma y resta de matrices se realiza elemento a elemento. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de la misma dimensión, entonces:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Multiplicación

La multiplicación de matrices no es conmutativa. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{B}$ es una matriz de $n \times p$, entonces el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es una matriz de $m \times p$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

La multiplicación de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se realiza de la siguiente manera:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

- **Suma y Resta:** Se realiza elemento a elemento.
- **Multiplicación:** No es conmutativa.
- **Ley Asociativa:** $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- **Ley Distributiva:** $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- **Igualdad:** $A = B \rightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \forall \ ij$
- **Multiplicación Escalar:** Sea $A_{m\times n}$ y $B_{k\times l}$ consideradas matrices
  - Si $n = k$ el producto de las matrices $A_{m\times n}B_{n\times l}$ existe y es igual a la matriz $C_{m\times l}$ de dimensiones $m \times l$.
  - Si $m = l$ el producto de las matrices $B_{n\times l}A_{m\times n}$ existe y es igual a la matriz $C_{k\times n}$ de dimensiones $k \times n$.

Operaciones con Matrices

$$\begin{bmatrix} & \rightarrow & & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b_{11} & b_{12} & & b_{1l} \\ \downarrow & b_{21} & b_{22} & & b_{2l} \\ & & & & \\ & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

No es mas que igual:

$$= \left[cij = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right] i = 1, 2, 3, \ldots, m \quad j = 1, 2, \ldots, l$$

Operaciones con Matrices

- **Transpuesta** Sea $A_{m\times n} = [a_{ij}]$. Luego vamos a encontrar que $A'_{n\times m} = [a_{ji}]$. Se le conocerá como A^T. Sus propiedades:
  - $(A')' = A$
  - $(A + B)' = A' + B'$
  - $(AB)' = B'A'$

Operaciones con Matrices

Consideremos la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

El determinante de $\mathbf{A}$, denotado como $\det(\mathbf{A})$, se calcula utilizando la regla de Sarrus para matrices 3×3:

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

Simplificando los cálculos:

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35)$$

Operaciones con Matrices

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3)$$

$$\det(\mathbf{A}) = -3 + 12 - 9 = 0$$

Operaciones con Matrices

La matriz inversa de una matriz $\mathbf{A}$, denotada como $\mathbf{A}^{-1}$, es tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Consideremos la matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La inversa de $\mathbf{A}$ se calcula como:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \frac{1}{(1 \cdot 4 - 2 \cdot 3)}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 6 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones se puede representar en forma de matriz como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matrices y convexidad

Funcionalidad

Sea $z = f(x, y)$ una función de derivadas parciales continuas de primer y segundo orden, definido sobre un conjunto abierto y convexo S del plano:

$$f \text{ es cóncava} \Leftrightarrow f''_{11} \leq 0, f''_{22} \leq 0, y \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} \geq 0$$

$$f \text{ es convexa} \Leftrightarrow f''_{11} \geq 0, f''_{22} \geq 0, y \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} \geq 0$$

Matrices y convexidad

Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Derivadas Parciales

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Matrices y convexidad

Para que f sea cóncava:

$$f_{xx} \leq 0, \quad f_{yy} \leq 0, \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \geq 0$$

Sustituyendo los valores:

$$2 \leq 0, \quad 2 \leq 0, \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \geq 0$$

Esta ocurriendo lo contrario. Por ende es una función convexa.

Un modelo sencillo en Economía

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 200 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Que viene a ser Ax?

Un modelo sencillo en Economía

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 200 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Que viene a ser Ax?

$$Ax = \begin{bmatrix} q + 4p \\ q - 6p \end{bmatrix}$$

Un modelo sencillo en Economía

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 200 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Que viene a ser Ax?

$$Ax = \begin{bmatrix} q + 4p \\ q - 6p \end{bmatrix}$$

Establecemos que $Ax = b$ va a brindar todo lo que tiene que ver las ecuaciones de Oferta y Demanda.

UNIVERSIDAD DEL NORTE