Economía Matemática

Carlos Yanes Guerra
15 de marzo de 2025 — Universidad del Norte

Introducción

Economía matemática

Definición

La economía matemática no es otra rama de la economía en el sentido en que lo son las finanzas públicas o el comercio internacional. Esta mas bien dirigido a ser un método utilizado en el análisis económico, en el cual el economista emplea símbolos matemáticos para enunciar los problemas y se basa en teoremas matemáticos para auxiliarse en el razonamiento.

Economía matemática

El **propósito** de este *modulo* no es mas que mostrar las nociones matemáticas y los aspectos mas importantes que requieren los economistas en:

- Álgebra matricial
- Análisis matemático
- Optimización teórica

Los estudiantes deben al terminar el curso de entender los **símbolos matemáticos** en el enunciado de cierto problema y recurrir también a teoremas matemáticos conocidos para ayudar en el razonamiento.

Tres disposiciones y seis características

Debemos entender que es necesario el saber:

1. La lógica teórica
2. Conocimiento práctico
3. Perspectiva histórica

En cuanto a las características de esto:

- Rigurosidad científica | Precisión | realidad | pertinencia | previsión | ideología

Símbolos

Miremos algunas cosas:

- Debe saber que intentamos simplificar lo que mas podamos lo que decimos normalmente expresado comúnmente o hablado con signos matemáticos.
- En lugar de escribir “Y esta en función de X”.
- Simplemente se establece $Y = f(X)$
- La simplicidad de las cosas permite ser mas concisos con algo y darle estructura a muchas cosas en los documentos científicos.

Símbolos

Ejemplo 1

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \tag{1}$$

donde:

- U es la función de utilidad del consumidor,
- x_1 y x_2 son las cantidades de bienes 1 y 2 consumidos, respectivamente,
- α es el parámetro de preferencia relativa entre los dos bienes ($0 < \alpha < 1$).

Símbolos

Vamos a utilizar una linea de símbolos en esta asignatura que es bueno que se conozca y familiarizar con los términos:

Símbolo	Significado
$\forall$	Para todo
$\in$	Pertenece
$\exists$	Existe
$\notin$	No pertenece
$\subseteq$	Subconjunto
$\cup$	Unión

Símbolos

La lógica también se hace necesario reconocer algunos de ellos para saber escribir científicamente un grupo de ecuaciones

Símbolo	Significado
$\neg$	Negación
$\wedge$	Conjunción
$\vee$	Disyunción
$\rightarrow$	Implicación
$\leftrightarrow$	Doble implicación
$\succ$	Preferido
$\perp$	Ortogonal

Símbolos

Lo mejor de manejar un mismo “lenguaje” para todos, los símbolos matemáticos representan casi siempre un mismo objeto. Por ejemplo $5, \sqrt{36}, \pi,$ y $[0, 1]$, que vienen a ser números especiales y adicionamos un intervalo. En muchas ocasiones le denominan *constantes lógicas*. Note la siguiente ecuación que muestra como x es un símbolo que representa una variable, que términa siendo un número.

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Sabemos

Que la expresión tiene que ver con la diferencia del cuadrado de un número que se llama x y 9 es igual al producto de dos números que se obtienen sumando y restando 3 de él.

Símbolos

Con el uso de la notación podemos ser concretos. Tome a consideración el uso de símbolos como $\exists$, que significa *existe* y el símbolo $\forall$, que tiene que ver con *para todo*.

Ejemplo 2

El estamento $\forall x \neq 0, \ \exists y \neq 0 \ : y \cdot x = 1$, significa que para cada número x, diferente de cero, existe algún número y, también diferente de cero, tal que el producto $y \cdot x$ es igual a 1.

Símbolos

Con el uso de la notación podemos ser concretos. Tome a consideración el uso de símbolos como $\exists$, que significa *existe* y el símbolo $\forall$, que tiene que ver con *para todo*.

Ejemplo 2

El estamento $\forall x \neq 0, \ \exists y \neq 0 \ : y \cdot x = 1$, significa que para cada número x, diferente de cero, existe algún número y, también diferente de cero, tal que el producto $y \cdot x$ es igual a 1.

Ejemplo 3

El principio de contraposición $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Símbolos

- Tome como referencia que si tuviéramos “*Si una persona es un ciudadano Colombiano, entonces tiene un pasaporte Colombiano.*”

Símbolos

- Tome como referencia que si tuviéramos “*Si una persona es un ciudadano Colombiano, entonces tiene un pasaporte Colombiano.*”
- Usando el principio de contraposición tendríamos ahora: “*Si una persona no tiene un pasaporte Colombiano, entonces no es un ciudadano Colombiano.*”

La contraposición ayuda a clarificar y reformular afirmaciones de manera que sean más fáciles de entender y verificar. Esto es especialmente útil en la lógica y las matemáticas, donde la precisión es crucial.

Símbolos

Pensemos

Si existe una persona que consume y compra tres elementos o unidades de producto a un precio diferenciado. Cuál es su gasto total?

Símbolos

Pensemos

Si existe una persona que consume y compra tres elementos o unidades de producto a un precio diferenciado. Cuál es su gasto total?

$$G \geq P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3$$

Símbolos

Pensemos

Si existe una persona que consume y compra tres elementos o unidades de producto a un precio diferenciado. Cuál es su gasto total?

$$G \geq P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3$$

$$G \geq \sum_{i=1}^{3} x_i p_i$$

Números Reales

Definición

Los **números reales** se usan para medir características físicas tales como tiempo, longitud, temperatura. En Economía se utilizan para medir los precios, cantidades, ingresos, tipos de impuestos, tasas de interés, costos medios y mas elementos en métricas.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

Números Naturales

Definición

Los **números naturales** son los utilizados para contar. Aunque ya los tenemos familiarizados, son de verdad un poco mas abstractos y avanzados. Históricamente las culturas al haberse inmiscuido con problemas diarios que tenían que ver con transacciones, idearon las reglas de: adición, sustracción, multiplicación y división. Si se suman o multiplican elementos naturales el resultado será otro número natural. Ya cambia la cosa cuando utilizamos las otras operaciones.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Logaritmos

El uso de logaritmos en economía y series de tiempo es su aplicabilidad, interpretación y el evento de permitir cumplir supuestos en la distribución de cierta variable x. Pues no es lo mismo x (en niveles) que $log(x)$,

$$\log_b(a) = c \iff b^c = a$$

Dentro del grupo de propiedades tenemos la del producto:

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Logaritmos

Para la parte de la *división*, es:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

En lo que tiene que ver cuando se usa potencia:

$$\log_b(x^c) = c \cdot \log_b(x)$$

Logaritmos

Como también es bueno tener presente su derivada:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Y cuando tiene base (b):

$$\frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{1}{x\ln(b)}$$

Como cuando ya se trata de una función:

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Conjuntos

Conjuntos convexos

Optimización: Muchos problemas económicos, como la maximización de utilidades o la minimización de costos, se formulan como problemas de optimización. Los conjuntos convexos permiten utilizar técnicas matemáticas avanzadas para encontrar soluciones óptimas.
Teoría de Juegos: En la teoría de juegos, los conjuntos convexos se utilizan para analizar estrategias y resultados posibles, ayudando a entender cómo los agentes económicos interactúan y toman decisiones.
Análisis de Equilibrio: En modelos de equilibrio general, los conjuntos convexos ayudan a demostrar la existencia y unicidad de equilibrios, lo cual es crucial para entender cómo los mercados alcanzan un estado de equilibrio.

Conjuntos convexos

Convexo

Un conjunto *convexo* si para todo $x, y \in X$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, tenemos que $\lambda x + (1 - \lambda) y \in X$

Conjuntos convexos

Convexo

Un conjunto *convexo* si para todo $x, y \in X$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, tenemos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$

Demostración

Demuestre ahora que $X + Y = \{x + y | x \in X, y \in Y\}$

Conjuntos convexos

Convexo

Un conjunto *convexo* si para todo $x, y \in X$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, tenemos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$

Demostración

Demuestre ahora que $X + Y = \{x + y | x \in X, y \in Y\}$

Para ello

Si tenemos que z_1 y z_2 dos elementos cualquiera de $X + Y$. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$ tal que podemos definir $z_1 = x_1 + y_1$ y ademas $z_2 = x_2 + y_2$. Tome entonces que $z = (\lambda x_1 + [1 - \lambda]x_2) + (\lambda y_1 + [1 - \lambda]y_2)$

Conjuntos convexos

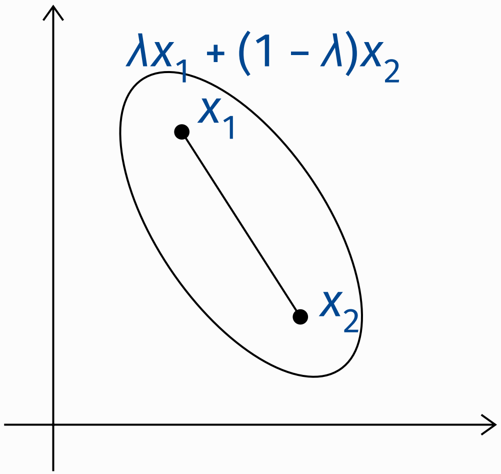


Figura 1: Conjunto Convexo

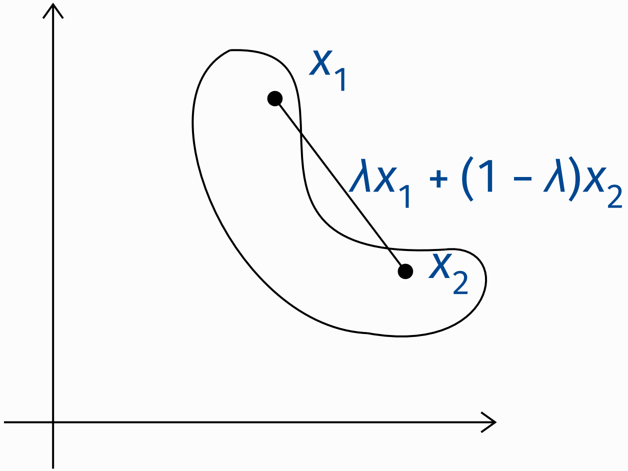


Figura 2: Conjunto No Convexo

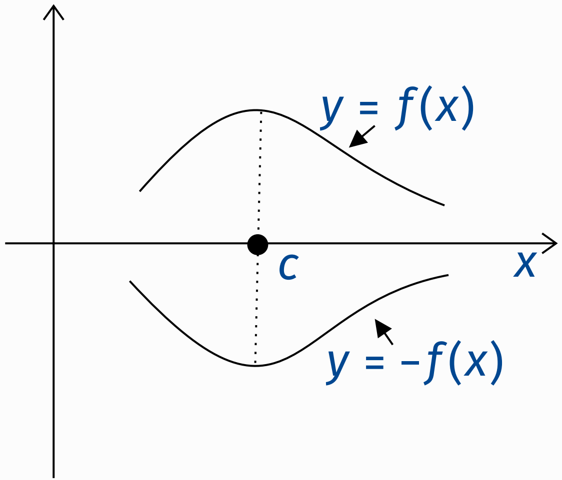
Definiciones a la convexidad

Vamos a pensar en un momento en una función $f(x)$ tiene dominio en A, para ello

$$c \in A \text{ es un máximo de f} \iff f(x) \leq f(c), \forall x \in A$$

$$d \in A \text{ es un mínimo de f} \iff f(x) \geq f(d), \forall x \in A$$

Puntos de lo convexo



Test de Derivadas

Test para mínimo o máximo

Si $f'(x) \geq 0$ para $x \leq c$, entonces $x = c$ es un máximo de f

Si $f'(x) \leq 0$ para $x \geq c$, entonces $x = c$ es un mínimo de f

UNIVERSIDAD DEL NORTE